

Université Libanaise ISAE - Cnam Liban Centre du Liban associé au Cnam Paris	Date : Lundi 20 Juin 2016 Durée : 2H De 14H à 16H	Semestre : 2^{ème} Année : 2015-2016		
Code UE : MVA 006		Ce sujet comporte : 2 pages		
Intitule de l'UE : <i>Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.</i>				
Type d'examen : Semestriel <input type="checkbox"/> Partiel <input checked="" type="checkbox"/> Final <input type="checkbox"/> Rattrapage Annuel <input type="checkbox"/> E1 <input type="checkbox"/> E'1 <input type="checkbox"/> E2 <input type="checkbox"/> E'2				
Documents autorisés : <input type="checkbox"/> Tous <input checked="" type="checkbox"/> Aucun <input type="checkbox"/> Autre (A préciser :)				
Consignes particulières : <i>Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.</i>				
Calculatrice: <input type="checkbox"/> Aucune <input type="checkbox"/> Programmable <input checked="" type="checkbox"/> Non programmable				
Centres concernés	<input checked="" type="checkbox"/> Beyrouth	<input checked="" type="checkbox"/> Baakline	<input checked="" type="checkbox"/> Baalbeck	<input checked="" type="checkbox"/> Nahr Ibrahim
	<input checked="" type="checkbox"/> Bickfaya	<input checked="" type="checkbox"/> Ghazza	<input checked="" type="checkbox"/> Tripoli	

Exercice 1: (4 points)

Considérons la fonction f de deux variables réelles définie sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi \text{ et } 0 < y < \pi\}$ par : $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

- 1- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur Ω .
- 2- Montrer que f admet trois points critiques dans Ω , qui sont situés sur la première bissectrice.
- 3- Etudier les extrémums locaux de f dans Ω .

Exercice 2 : (5 points)

Soit (C) la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t - 3 \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

- 1- Donner le domaine de définition de cette courbe et étudier ses branches infinies.
- 2- Calculer $x'(t)$, $y'(t)$, $x''(t)$, $y''(t)$, $x'''(t)$ et $y'''(t)$.
- 3- • Montrer que la courbe (C) admet un point de rebroussement dont on précisera l'espèce.
On précisera l'équation de la tangente à (C) en ce point.
• La courbe (C) admet-elle des points d'inflexion ?
- 4- Dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
- 5- Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère puis dessiner (C).

Exercice 3: (4,5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \iint_D (x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

b) $J = \iint_D dx dy$ où D est le domaine situé dans le premier quadrant limité par les courbes d'équations $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{1}{3x}$. **Aide:** on pourra poser $u = \frac{y}{x}$ et $v = xy$

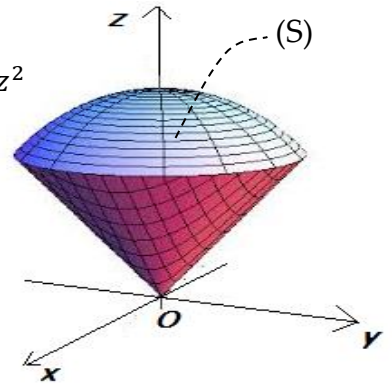
c) $K = \iiint_{\Omega} \frac{\sin(\pi x^2)}{z+1} dx dy dz$ où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1\}$.

Exercice 4: (3 points)

Soit (S) le solide représenté ci-contre, limité par le cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et la sphère d'équation $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Sachant que la densité de masse volumique de (S) est $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

- a) calculer la masse M du solide (S)
- b) calculer les coordonnées du centre de gravité G de (S)



Exercice 5: (3,5 points)

Considérons les matrices carrées suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1-Calculer A^2 .

2-Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

3-Résoudre le système linéaire suivant : (S₁)
$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + z = -3 \\ mx + y + z = 3m + 1 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, où m est un paramètre réel.

4-Considérons les matrices $M = A + 3I$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer MC . En déduire que la matrice M n'est pas inversible.

b) Résoudre le système linéaire suivant : (S₂)
$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 2 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$
 d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.